TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI – AMSTERDAM
TỔ TOÁN - TIN

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ II
MÔN TOÁN LỚP 10
Năm học 2017 – 2018

*(Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)*

I. Câu hỏi trắc nghiệm *(4,0 điểm)*. Chọn phương án đúng ***(Học sinh ghi đáp án vào giấy làm bài thi)***

Câu 1. Nếu $a > b, c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac > bd.$ **B.** $a - c > b - d.$ **C.** $a + b > c + d.$ **D.** $a + c > b + d.$

Câu 2. Các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 1)x + m \geq 0$ có nghiệm là:

A. $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m \in \varnothing.$ **C.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$ **D.** $m = -1.$

Câu 3. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1-2x}{4x+8} \geq 0$ là:

A. $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right].$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};2\right].$ **C.** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right].$ **D.** $\left[\dfrac{1}{2};2\right).$

Câu 4. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 12 < 0 \end{cases}$ là:

A. $[2;5].$ **B.** $[1;6].$ **C.** $(2;5].$ **D.** $[1;2] \cup [5;6].$

Câu 5. Các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm là:

A. $m \in \varnothing.$ **B.** $m < -1.$ **C.** $-1 < m < 0.$ **D.** $-1 < m \leq 0.$

Câu 6. Khi thống kê điểm môn Toán trong một kỳ thi của 200 em học sinh thì thấy có 36 bài được điểm bằng 5. Tần suất của giá trị $x_i = 5$ là:

A. $2,5\%.$ **B.** $36\%.$ **C.** $18\%.$ **D.** $10\%.$

Câu 7. Chọn hệ thức sai trong các hệ thức sau:

A. $tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = cot\,x.$ **B.** $sin(3\pi - x) = sin\,x.$ **C.** $cos(3\pi - x) = cos\,x.$ **D.** $cos(-x) = cos\,x.$

Câu 8. Cho $sin\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Giá trị của $cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}.$ **B.** $\sqrt{6} - 3.$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}} - 3.$ **D.** $\sqrt{6} - \dfrac{1}{2}.$

Câu 9. Nếu $sin\,x + cos\,x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì giá trị của $sin\,2x$ là:

A. $\dfrac{1}{2}.$ **B.** $-\dfrac{1}{2}.$ **C.** $\dfrac{1}{4}.$ **D.** $-\dfrac{1}{4}.$

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1): 3x - 4y + 7 = 0, (d_2): 5x + y + 4 = 0$ và $(d_3): mx + (1-m)y + 3 = 0.$ Để ba đường thẳng này đồng quy thì giá trị của tham số m là:

A. $m = 2.$ **B.** $m = -2.$ **C.** $m = 0,5.$ **D.** $m = -0,5.$

Câu 11. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;3)$ và $B(4;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

A. $x + y - 3 = 0.$ **B.** $y = 2x + 1.$ **C.** $\dfrac{x-4}{6} = \dfrac{y-1}{-4}.$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}.$

Câu 12. Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là 80, độ dài tiêu cự là 6. Tâm sai của elip đó là:

A. $e=\frac{4}{5}$. **B.** $e=\frac{3}{4}$. **C.** $e=\frac{3}{5}$. **D.** $e=\frac{4}{3}$.

Câu 13. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;-1)$ và $B(3;4)$. Giả sử (d) là một đường thẳng bất kỳ luôn đi qua điểm B. Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, đường thẳng (d) có phương trình nào sau đây?

A. $x-y+1=0$. **B.** $3x+4y=25$. **C.** $5x-2y-7=0$. **D.** $2x+5y-26=0$.

Câu 14. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1)$ và tạo với đường thẳng có phương trình $x-3y+2=0$ một góc bằng 45^0. Đường thẳng (d) có phương trình là:

A. $2x+y+1=0$. **B.** $2x-y=1$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $3x+y-4=0$.

Câu 15. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là:

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$. **C.** $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 16. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm P kẻ các tiếp tuyến PM và PN tới đường tròn (C), với M và N là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng MN là:

A. $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

II. Tự luận *(6,0 điểm* – *6,0 điểm).*

Bài 1. (***1,5 điểm*** – *1,5 điểm*).

a) Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $\left|2x+1\right|+2\ge 4x$.

b) Giải hệ bất phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases}\frac{x+3}{2x-3}-\frac{x}{2x-1}\le 0\\ \sqrt{x^2+3}+3x<1\end{cases}$

Bài 2. (***1,5 điểm*** – *2,0 điểm*).

a) Chứng minh đẳng thức: $\frac{cos\,2x}{1-sin\,2x}=\frac{1}{cos^2x-sin^2x}+\frac{2tan\,x}{1-tan^2x}$ khi các biểu thức đề xác định.

b) Tìm các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-4x>5\\ x^2-(m-1)x-m\le 0\end{cases}$ có nghiệm.

Bài 3. (***2,5 điểm*** – *2,5 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ và $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

a) Tìm tọa độ tâm, bán kính của hai đường tròn và chứng minh hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng 45°.

c) Cho elip (E) có phương trình $16x^2+49y^2=1$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip (E) và (C) tiếp xúc với hai đường tròn $(C_1),(C_2)$.

Bài 4. (***0,5 điểm*** – *0 điểm*). ***(Chỉ dành cho các lớp 10 Tin, L₁, L₂, H₁, H₂)***

Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}.$$

------------------------------ ***Hết*** ------------------------------

GỢI Ý ĐÁP ÁN.

I. Câu hỏi trắc nghiệm *(4,0 điểm)*. Chọn phương án đúng ***(Học sinh ghi đáp án vào giấy làm bài thi)***

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	D	C	C	C	C	C	C	A
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	A	A	D	C	D	B	D	D

Câu 1. Nếu $a > b, c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac > bd.$ **B.** $a - c > b - d.$ **C.** $a + b > c + d.$ **D.** $a + c > b + d.$

♥ **Giải thích đáp án.**

Dễ thấy đây là quy tắc cộng 2 bất đẳng thức cùng chiều: Khi $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d \rightarrow$ **Chọn D.**

Câu 2. Các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 1)x + m \geq 0$ có nghiệm là:

A. $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m \in \varnothing.$ **C.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$ **D.** $m = -1.$

♥ **Giải thích đáp án.**

- Khi $m = 1 \Rightarrow 0 + 1 \geq 0$ (thỏa mãn).
- Khi $m = -1 \Rightarrow 0 - 1 \geq 0$ (vô lí)
- Khi $m \neq \pm 1 \Rightarrow x \geq \dfrac{m}{1 - m^2}$ (thỏa mãn).

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -1$ hay $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 3. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1 - 2x}{4x + 8} \geq 0$ là:

A. $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right].$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right].$ **C.** $\left(-2; \dfrac{1}{2}\right].$ **D.** $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right).$

♥ **Giải thích đáp án.**

Dễ thấy $\dfrac{1 - 2x}{4x + 8} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 1}{4(x + 2)} \leq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \left(-2; \dfrac{1}{2}\right] \rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 4. Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 12 < 0 \end{cases}$ là:

A. $[2; 5].$ **B.** $[1; 6].$ **C.** $(2; 5].$ **D.** $[1; 2] \cup [5; 6].$

♥ **Giải thích đáp án.**

Ta có: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 8x + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 5 \Rightarrow S = (2; 5] \rightarrow$ **Chọn C.**

Câu 5. Các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm là:

A. $m \in \varnothing.$ **B.** $m < -1.$ **C.** $-1 < m < 0.$ **D.** $-1 < m \leq 0.$

♥ **Giải thích đáp án.**

Áp dụng ĐL về dấu tam thức bậc hai ta thấy $f(x) \geq 0$ nên BPT vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \to$ **Chọn C.**

Câu 6. Khi thống kê điểm môn Toán trong một kỳ thi của 200 em học sinh thì thấy có 36 bài được điểm bằng 5. Tần suất của giá trị $x_i = 5$ là:

A. $2,5\%$. **B.** 36%. **C.** 18%. **D.** 10%.

♥ **Giải thích đáp án.**

Vì có 36 bài được điểm 5 nên tần số của điểm 5 là $n_i = 36$.

Vậy tần suất của giá trị $x_i = 5$ là: $f_i = \dfrac{n_i}{N} \times 100 = \dfrac{36}{200} \times 100 = 18\% \to$ **Chọn C.**

Câu 7. Chọn hệ thức sai trong các hệ thức sau:

A. $tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = cot\,x$. **B.** $sin(3\pi - x) = sin\,x$. **C.** $cos(3\pi - x) = cos\,x$. **D.** $cos(-x) = cos\,x$.

♥ **Giải thích đáp án.**

- Dễ thấy $tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = cot\,x$ (vì tan tuần hoàn chu kỳ π). A đúng.
- Và $sin(3\pi - x) = sin(\pi - x) = sin\,x$ (vì sin tuần hoàn chu kỳ 2π). B đúng.
- Và $cos(3\pi - x) = cos(\pi - x) = -cos\,x$ (vì cos tuần hoàn chu kỳ 2π) $\to$ **Chọn C.**

Lưu ý. *Với học sinh không nắm rõ chu kỳ và giá trị lượng giác của các góc bù, phụ, đối. Có thể lấy sử dụng máy tính CASIO ở chế độ R và lấy x bất kỳ thay vào để thử đáp án.*

Câu 8. Cho $sin\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Giá trị của $cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$. **B.** $\sqrt{6} - 3$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}} - 3$. **D.** $\sqrt{6} - \dfrac{1}{2}$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Ta thấy $\begin{cases} cos\,\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} \\ 0 < cos\,\alpha < 1 (do\, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow cos\,\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Mà $cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = cos\alpha\, cos\dfrac{\pi}{3} - sin\,\alpha\, sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \to$ **Chọn A.**

Lưu ý. *Ta có thể sử dụng Casio đổi ra góc α thấy thuộc khoảng (0;π/2), lấy KQ tính cos(Ans+π/3) lưu lại là X. Sau đó lấy X trừ đi kết quả ở các đáp án để thử.*

Câu 9. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì giá trị của $\sin 2x$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Ta thấy $\left(\sin x + \cos x\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \to$ **Chọn A.**

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1): 3x - 4y + 7 = 0, (d_2): 5x + y + 4 = 0$ và $(d_3): mx + (1-m)y + 3 = 0$. Để ba đường thẳng này đồng quy thì giá trị của tham số m là:

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 0,5$. **D.** $m = -0,5$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Bấm máy giải hệ phương trình tạo bởi phương trình của $(d_1) \& (d_2)$ ta được tọa độ giao điểm $M\left(-1;1\right)$.

Để ba đường thẳng đồng quy (tại M) thì M phải thuộc $(d_3) \Rightarrow -m + 1 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \to$ **Chọn A.**

Câu 11. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;3)$ và $B(4;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

A. $x + y - 3 = 0$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $\frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-4}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Để đơn giản ta cứ thay tọa độ của A và B vào kiểm tra thấy ngay A,B,C sai $\to$ **Chọn D.**

Câu 12. Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là 80, độ dài tiêu cự là 6. Tâm sai của elip đó là:

A. $e = \frac{4}{5}$. **B.** $e = \frac{3}{4}$. **C.** $e = \frac{3}{5}$. **D.** $e = \frac{4}{3}$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Diện tích hình chữ nhật cơ sở là: $2a.2b = 80 \Leftrightarrow ab = 20$ mà $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 9\left(do\, c = 3\right)$

Ta được $\begin{cases} ab = 20 \\ a^2 - b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{400}{a^2} \\ a^2 - \frac{400}{a^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{400}{a^2} \\ a^4 - 9a^2 - 400 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \to$ **Chọn C.**

Câu 13. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;-1)$ và $B(3;4)$. Giả sử (d) là một đường thẳng bất kỳ luôn đi qua điểm B. Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, đường thẳng (d) có phương trình nào sau đây?

A. $x - y + 1 = 0$. **B.** $3x + 4y = 25$. **C.** $5x - 2y - 7 = 0$. **D.** $2x + 5y - 26 = 0$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Gọi $(d): a(x-3) + b(y-4) = 0\ hay\ ax + by - 3a - 4b = 0\left(a^2 + b^2 > 0\right)$

Khi đó $d(A \to (d)) = \frac{|a - b - 3a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2a + 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \overset{Bunhiacopxki}{\leq} \frac{\sqrt{\left(4 + 25\right)\left(a^2 + b^2\right)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{29}$

Khi đó $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}\ hay\ \frac{a}{b}=\frac{2}{5}\to(d):2x+5y-26=0\to$ **Chọn D.**

Câu 14. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1)$ và tạo với đường thẳng có phương trình $x-3y+2=0$ một góc bằng 45^0. Đường thẳng (d) có phương trình là:

A. $2x+y+1=0$. **B.** $2x-y=1$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $3x+y-4=0$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Gọi $(d):a(x-1)+b(y-1)=0\ hay\ ax+by-a-b=0\left(a^2+b^2>0\right)$

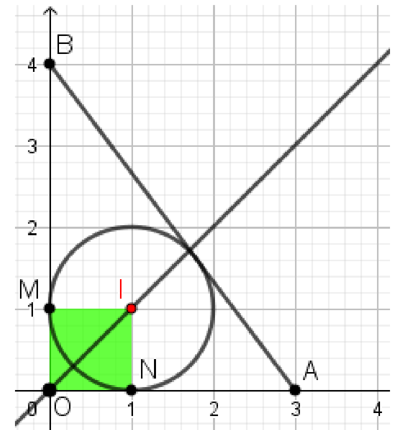
Vì $\begin{cases}\vec{u}_d=(b;-a)\\ \vec{u}_{x-3y+2=0}=(3;1)\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=cos45^0=cos\left(\vec{u}_d,\vec{u}_{x-3y+2=0}\right)=\frac{3b-a}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow(a-3b)^2=5a^2+5b^2$

Hay $(2a-b)(a+2b)=0\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow(a;b)=(1;2)\Rightarrow(d):x+2y-3=0\\ \frac{a}{b}=-2\Rightarrow(a;b)=(2;-1)\Rightarrow(d):2x-y-1=0\end{array}\right.\to$ **Chọn B.**

Câu 15. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là:

A. $x^2+y^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x+4=0$. **C.** $x^2+y^2=2$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

♥ **Giải thích đáp án.**



Tâm I là giao của 3 đường phân giác trong của ΔOAB mà A và B lần lượt nằm trên Ox và Oy nên phân giác của góc AOB chính là phân giác góc phần tư thứ I và III có phương trình: $y=x$.

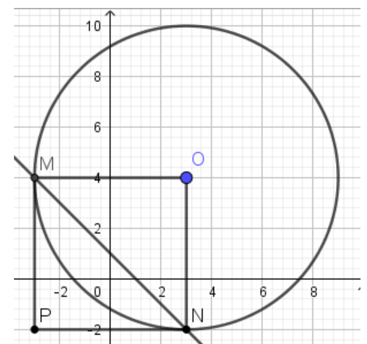
Gọi $I(m;m)$ là tâm đường tròn nội tiếp ta có:

$$\begin{cases}d(I\to OA)=d(I\to AB)\\ OA:x=0\\ AB:\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1\Leftrightarrow 4x+3y-12=0\end{cases}$$

Hay $|m|=\frac{|7m-12|}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7m-12=5m\Leftrightarrow m=6\\ 12-7m=5m\Leftrightarrow m=1\end{array}\right.\to$ **Chọn D.**

Lưu ý. Nếu tinh ý ta có thể thấy tâm đường tròn nội tiếp, gốc tọa độ và hình chiếu của tâm lên 2 trục Ox và Oy lập thành một hình vuông cạnh bằng bán kính đường tròn nội tiếp(bằng 1) nên ta có ngay phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 16. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $P(-3;-2)$ và đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-4)^2=36$. Từ điểm P kẻ các tiếp tuyến PM và PN tới đường tròn (C), với M và N là các tiếp điểm. Phương trình đường thẳng MN là:



A. $x+y+1=0$. **B.** $x-y-1=0$.

C. $x-y+1=0$. **D.** $x+y-1=0$.

♥ **Giải thích đáp án.**

Dễ thấy tứ giác OMPN (O(3;4) là tâm đường tròn) là hình vuông nên (MN) nhận $\overrightarrow{OP}=\left(-6;-6\right)\uparrow\uparrow\left(1;1\right)$ làm vecto pháp tuyến và đi qua trung điểm $K\left(0;1\right)$ của OP.

Vậy $(MN):\left(x-0\right)+\left(y-1\right)=0\ hay\ x+y-1=0\rightarrow$ **Chọn D.**

II. Tự luận *(6,0 điểm – 6,0 điểm).*

Bài 1. ***(1,5 điểm** – 1,5 điểm).*

a) Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $\left|2x+1\right|+2\geq 4x.$

b) Giải hệ bất phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases}\dfrac{x+3}{2x-3}-\dfrac{x}{2x-1}\leq 0\\ \sqrt{x^2+3}+3x<1\end{cases}$

♥ **Giải.**

a) Ta có BPT $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\geq 0\\ 2x+3\geq 4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{2}\\ x\leq\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}\\ \begin{cases}2x+1<0\\ -2x+1\geq 4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ x\leq\dfrac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow S=\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right].$

b) Điều kiện: $\begin{cases}2x-3\neq 0\\ 2x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\dfrac{3}{2},x\neq\dfrac{1}{2}$

$$\text{HBPT}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left(x+3\right)\left(2x-1\right)-x\left(2x-3\right)}{\left(2x-1\right)\left(2x-3\right)}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{8x-3}{\left(2x-1\right)\left(2x-3\right)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{8}\leq x<\dfrac{3}{2}\\ x<\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \sqrt{x^2+3}<1-3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{3}\\ x^2+3<1-6x+9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{3}\\ 4x^2-3x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Kết hợp nghiệm ta được: $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right).$

Bài 2. ***(1,5 điểm** – 2,0 điểm).*

a) Chứng minh đẳng thức: $\dfrac{cos\,2x}{1-sin\,2x}=\dfrac{1}{cos^2x-sin^2x}+\dfrac{2tan\,x}{1-tan^2x}$ khi các biểu thức đề xác định.

b) Tìm các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-4x>5\\ x^2-(m-1)x-m\leq 0\end{cases}$ có nghiệm.

♥ **Giải.**

a) Ta có: $VP = \dfrac{1}{cos^2x - sin^2x} + \dfrac{\dfrac{2sin\,x}{cos\,x}}{1 - \dfrac{sin^2x}{cos^2x}} = \dfrac{1}{cos^2x - sin^2x} + \dfrac{2sin\,xcos\,x}{cos^2x - sin^2x}$

$= \dfrac{1 + 2sin\,xcos\,x}{\left(sin\,x + cos\,x\right)\left(cos\,x - sin\,x\right)} = \dfrac{\left(sin\,x + cos\,x\right)^2}{\left(sin\,x + cos\,x\right)\left(cos\,x - sin\,x\right)} = \dfrac{sin\,x + cos\,x}{cos\,x - sin\,x}$ (1)

Mà $VT = \dfrac{cos\,2x}{1 - sin\,2x} = \dfrac{cos^2x - sin^2x}{cos^2x + sin^2x - 2sinxcosx} = \dfrac{\left(cosx - sinx\right)\left(cosx + sinx\right)}{\left(cosx - sinx\right)^2} = \dfrac{cosx + sinx}{cosx - sinx}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $VT = VP \Rightarrow$ ĐPCM.

b) Ta có $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > \\ x^2 - (m-1)x - m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -1 \end{array}\right. \\ \left(x+1\right)\left(x-m\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5 \\ x \le m \end{cases} \Leftrightarrow m > 5 \\ \begin{cases} x < -1 \\ x \ge m \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 5 \end{array}\right.$ thì hệ bất phương trình luôn có nghiệm.

Bài 3. (**2,5 điểm** – *2,5 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

a) Tìm tọa độ tâm, bán kính của hai đường tròn và chứng minh hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và tạo với đường thẳng nối tâm của hai đường tròn một góc bằng 45°.

c) Cho elip (E) có phương trình $16x^2 + 49y^2 = 1$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip (E) và (C) tiếp xúc với hai đường tròn $(C_1),(C_2)$.

♥ **Giải.**

a) Ta thấy đường tròn (C_1) có tâm $I_1\left(-1;-2\right)$ và bán kính $R_1 = 3$. Đường tròn (C_2) có tâm $I_2\left(2;2\right)$ và bán kính $R_2 = 2$. Khi đó: $5 = R_1 + R_2 = I_1I_2 = \sqrt{\left(2+1\right)^2 + \left(2+2\right)^2} = 5 \Rightarrow$ (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau.

b) Ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = \left(3;4\right)$ gọi vectơ chỉ phương của đường thẳng cần lập là $\vec{u}\left(a;b\right)$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = cos\,45^0 = cos\left(\overrightarrow{I_1I_2}, \vec{u}\right) = \dfrac{3a + 4b}{5\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{9a^2 + 24ab + 16b^2}{25a^2 + 25b^2}$

$\Leftrightarrow 7a^2 - 48ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(a;b\right) = \left(7;1\right) \Rightarrow 7x + y = 0 \\ \left(a;b\right) = \left(1;-7\right) \Rightarrow x - 7y = 0 \end{array}\right.$

c) Ta có $16x^2+49y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=1 \Rightarrow$ Độ dài trục lớn của (E) là $2a=2.\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy bán kính đường tròn (C) cần lập là $R=1$.

Khi đó xét ΔII_1I_2 ta có: $\begin{cases} II_1=R_1+R=3+1=4 \\ II_2=R_2+R=2+1=3 \end{cases} \Rightarrow \Delta II_1I_2$ vuông tại I.

Gọi $I(a;b)$ ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{II_1}.\overrightarrow{II_2}=0 \\ II_2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+1)+(b-2)(b+2)=0 \\ (a-2)^2+(b-2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a-6=0 \\ a^2+b^2-4a-4b-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+4b=5 \\ a^2+b^2-a-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5-3a}{4} \\ 25a^2-46a-71=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I\left(\dfrac{71}{25};-\dfrac{22}{25}\right)(tm) \\ I(-1;2)\equiv I_1(loai) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn cần lập là: $(C):\left(x-\dfrac{71}{25}\right)^2+\left(y+\dfrac{22}{25}\right)^2=1$.

Bài 4. **(0,*5 điểm* – *0 điểm*).** ***(Chỉ dành cho các lớp 10 Tin, L₁, L₂, H₁, H₂)***

Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}.$$

♥ **Giải.**

Ta có $\sqrt{1+8a^3}=\sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)}\overset{AM-GM}{\leq}\dfrac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}=1+2a^2$

Tương tự vai trò cho $\sqrt{1+8b^3}$ và $\sqrt{1+8c^3}$ ta được: $P\geq\dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1}{1+2b^2}+\dfrac{1}{1+2c^2}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{1+2a^2}=\dfrac{1}{1+2a^2}+\dfrac{1+2a^2}{9}-\dfrac{1+2a^2}{9}\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{\dfrac{1}{1+2a^2}.\dfrac{1+2a^2}{9}}-\dfrac{2}{9}a^2-\dfrac{1}{9}=\dfrac{5-2a^2}{9}$

Khi đó $P\geq\dfrac{5-2a^2}{9}+\dfrac{5-2b^2}{9}+\dfrac{5-2c^2}{9}=\dfrac{15-2(a^2+b^2+c^2)}{9}=\dfrac{15-2.3}{9}=1$. Vậy $Min\,P=1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=3 \\ 1+2a=1-2a+4a^2 \text{ và vai trò } a,b,c \text{ như nhau hay } (a;b;c)=(1;1;1). \\ \dfrac{1}{1+2a^2}=\dfrac{1+2a^2}{9} \end{cases}$

-------------------------------- ***Hết*** --------------------------------